مجلهٔ فیزیک، ۱۳۷۷، ۱۶، ۴، ۱۷۶ـ۱۷۸

تحلیل ابعادی و لختی دورانی

امیر آقامحمدی*

روشی برای محاسبهٔ لختی دورانی بعضی از اجسام ارائه می‌شود که در آن فقط از تحلیل ابعادی و قضیهٔ محورهای موازی استفاده می‌شود.

تحلیل ابعادی، اگر بتوان پارامترهای دخیل در مسئله را به درستی تشخیص داد، روشی ساده‌ای برای یافتن رابطه‌ای بین کمیتهای فیزیکی مربوط به مسئله به دست می‌دهد. در ساده‌ترین حالت، رابطهٔ بین این کمیتها تقریباً به طور کامل نتیجه می‌شود و فقط یک ثابت بی‌بعد باقی می‌ماند [۱]. اما مواردی پیدا می‌شود که با افزودن اندکی فیزیک به تحلیل ابعادی می‌توان آن ثابت بی‌بعد را هم یافت. به این روش، مثلاً می‌توان لختی دورانی بعضی از اجسام را به دست آورد.

لختی دورانی هر جسم حول یک محور از تعریف

$$I = \int r^2 dm \qquad (۱)$$

به دست می‌آید [۲]. در اینجا r فاصله از محور مورد نظر است. برای یافتن این کمیت باید یک انتگرال (احیاناً چندگانه) را محاسبه کرد. نتیجه به شکل

$$I = ML^2 \qquad (۲)$$

است، که در آن M جرم جسم و L کمیتی با بعد طول است. یکی از پارامترهای طول جسم را a می‌گیریم. در این صورت

$$I = \alpha M a^2 \qquad (۳)$$

که α ثابتی بی‌بعد است. با این مقدمات، سراغ لختی دورانی میله‌ای همگن به جرم M و طول l می‌رویم. لختی دورانی این میله حول مرکز جرمش را $I = \alpha M l^2$ می‌گیریم. برای میله‌ای با همان چگالی ولی با طول $2l$، لختی دورانی به همان شکل قبل نوشته می‌شود. فقط باید به جای جرم میله $2M$، و به جای طول آن $2l$ گذاشت؛ α همان ثابت قبلی است. پس لختی دورانی میلهٔ به طول $2l$ حول مرکز جرمش

$$I = \alpha(2M)(2l)^2 = 8\alpha M l^2 \qquad (۴)$$

است. اما میلهٔ به طول $2l$ از دو میلهٔ به جرم M و طول l تشکیل شده است، که لختی دورانی هر یک از میله‌ها حول مرکز جرمش $\alpha M l^2$ است. با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی [۲]، لختی دورانی هر یک از میله‌های کوچکتر حول مرکز جرم میلهٔ به طول $2l$ را به دست می‌آوریم. در این صورت لختی دورانی میلهٔ به طول $2l$ می‌شود

$$I = 2\left(\alpha M l^2 + \frac{Ml^2}{4}\right) \qquad (۵)$$

با مقایسهٔ روابط ۴ و ۵ مقدار α به دست می‌آید. نتیجه آنکه لختی دورانی میله‌ای همگن به جرم M و طول l

$$I = \frac{Ml^2}{12} \qquad (۶)$$

است. البته این نتیجه را با انتگرال‌گیری مستقیم (رابطهٔ ۱) هم می‌شد به سادگی به دست آورد. پس سراغ مثالهای پیچیده‌تری می‌رویم. ساده‌ترین

* دانشگاه الزهرا و پژوهشگاه دانشهای بنیادی.

مثال دوبعدی، مربعی همگن به جرم M و طول ضلع l است. لختی دورانی این مربع حول مرکز جرمش را نیز $I = \alpha M l^۲$ می‌گیریم. برای مربعی با همین چگالی و طول ضلع $۲l$،

$$I = \alpha(۴M)(۲l)^۲ = ۱۶\alpha M l^۲ \qquad (۷)$$

اما این مربع از چهار مربع به جرم M و ضلع l تشکیل شده است. لختی دورانی هر یک از میله‌ها حول مرکز خود $\alpha M l^۲$ است. با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی، و با استفاده ا ز رابطهٔ ۷

$$۱۶\alpha M l^۲ = ۴\left(\alpha M l^۲ + \frac{M l^۲}{۲}\right) \qquad (۸)$$

از رابطهٔ ۸ نتیجه می‌شود $\alpha = ۱/۶$، و لختی دورانی مربع همگن $I = ml^۲/۶$ می‌شود.

حال مستطیلی به ابعاد a و b در نظر بگیرید. لختی دورانی را به شکلهای مختلفی، از جمله $\alpha M a^۲$ ، $\beta M b^۲$، و . . . می‌توان نوشت. بدیهی است که α، β، و . . . کمیتهایی بی‌بعداند که به a و b بستگی دارند. ولی چون هیچ یک از اضلاع بر دیگری برتری ندارد، قاعدتاً می‌توان از هریک از اشکال بالا برای لختی دورانی استفاده کرد و نتیجهٔ نهایی باید مستقل از انتخاب اولیه باشد. برای مستطیل، لختی دورانی را $I = \alpha M a^۲$ می‌گیریم. برای مستطیلی از همان جنس به ابعاد $۲a$ و $۲b$، لختی دورانی حول مرکز جرم

$$I = ۱۶\alpha M a^۲ \qquad (۹)$$

است. این مستطیل نیز از چهار مستطیل کوچکتر به ابعاد a و b تشکیل شده است، که فاصلهٔ مرکز جرم هر یک از آنها از مرکز جرم مستطیل بزرگ $\sqrt{a^۲+b}/۲$ است. با تکرار روشی که دیدیم، به رابطهٔ زیر می‌رسیم.

$$۱۶\alpha M a^۲ = ۴\left(\alpha M a^۲ + M\frac{a^۲+b^۲}{۴}\right) \qquad (۱۰)$$

$$\alpha = \frac{a^۲+b^۲}{۱۲a^۲} \qquad (۱۱)$$

اگر از $I = \beta M b^۲$ شروع می‌کردیم، β می‌شد

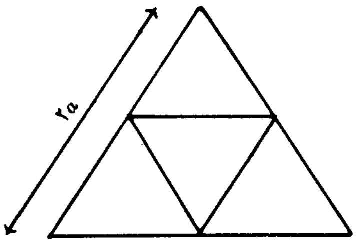
$$\beta = \frac{a^۲+b^۲}{۱۲b^۲} \qquad (۱۲)$$

در هر دو حال، α و β کمیتهایی بی‌بعداند که به a و b بستگی دارند و لختی دورانی مستطیل حول مرکز جرمش

$$I = M\frac{a^۲+b^۲}{۱۲} \qquad (۱۳)$$

است.

مثال دیگری که روش انتگرال‌گیری برای آن پیچیده‌تر است، مثلث است. مثلث متساوی‌الاضلاعی به جرم M و طول ضلع a در نظر بگیرید. لختی دورانی آن حول مرکز جرمش $I = \alpha M a^۲$ است. لختی دورانی مثلث متساوی‌الاضلاعی از همان جسم و به طول ضلع $۲a$ ، $I = ۱۶\alpha M a^۲$ است. این مثلث از چهار مثلث کوچکتر تشکیل شده است، فاصلهٔ مرکز جرم



شکل ۱.

سه تا مثلثهای کوچک از مرکز جرم مثلث بزرگ یک سوم میانهٔ مثلث بزرگ، $a/\sqrt{۳}$ است. پس

$$۱۶\alpha M a^۲ = ۳(\alpha M a^۲ + \frac{M a^۲}{۳}) + \alpha M a^۲ \qquad (۱۴)$$

که از اینجا $\alpha = ۱/۱۲$ به دست می‌آید.

به این ترتیب

$$I = \frac{۱}{۱۲} M a^۲ \qquad (۱۵)$$

مثال دیگری که کاملاً غیر بدیهی است، مثلثی با اضلاعی به طول a، b، و c است. برای این مثلث نیز $I = \alpha M a^۲$ است. بدیهی است که ضریب بدون بعد α به a، b، و c بستگی دارد ولی با مقیاس کردن یکسان آنها تغییر نمی‌کند. لختی دورانی مثلثی به طول ضلعهای $۲a$، $۲b$، و $۲c$ برابر $۱۶\alpha M a^۲$ است. با همان روش بالا، نتیجه می‌شود

$$۱۶\alpha M a^۲ = (\alpha M a^۲ + M d_۱^۲) + (\alpha M a^۲ + M d_۲^۲) + (\alpha M a^۲ + M d_۳^۲) + \alpha M a^۲ \qquad (۱۶)$$

که $d_۱$ ، $d_۲$، و $d_۳$ فواصل مرکز جرم سه مثلث کوچک جانبی از مرکز جرم مثلث بزرگ‌اند.

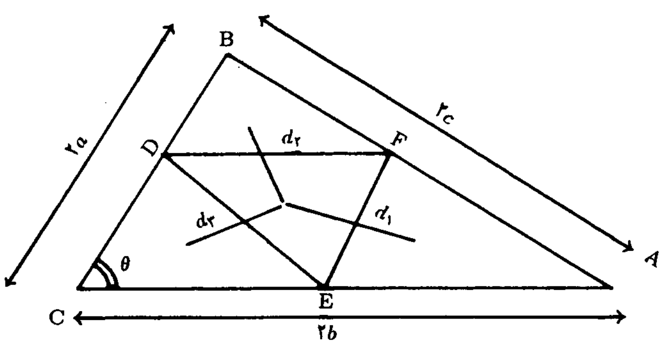
اما $d_i = l_i/۳$، که l_iها طول میانه‌های مثلث بزرگ‌اند. پس

$$۱۲\alpha a^۲ = \frac{l_۱^۲ + l_۲^۲ + l_۳^۲}{۹} \qquad (۱۷)$$

در مثلثهای CBE و CDE (شکل ۲) داریم

$$۴a^۲ + b^۲ - ۴ab\cos\theta = l_۲^۲ \qquad (۱۸)$$

$$a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\theta = c^۲ \qquad (۱۹)$$



شکل ۲.

که از اینجا $l_2^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ می‌شود. به همین ترتیب l_1^2 و l_3^2 را نیز می‌توان به دست آورد. از اینجا

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (۲۰)$$

و به این ترتیب،

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36a^2} \qquad (۲۱)$$

بنابراین لختی دورانی یک مثلث همگن به اضلاع a و b و c و جرم M، حول محوری عمود بر صفحهٔ جسم که از مرکز جرم مثلث می‌گذرد، می‌شود

$$I = M\frac{a^2 + b^2 + c^2}{36} \qquad (۲۲)$$

اما سؤال آخر آن‌که این روش در چه مواردی قابل اجرا است. اولاً، توزیع جرم باید همگن باشد. ثانیاً می‌دانیم که با مقیاس کردن شکل جسم، به شکلی متشابه با شکل اولیه می‌رسیم. در صورتی که این شکل جدید را بتوان به تعدادی از شکلهای اولیه (مثلاً در دو بعد، با دو برابر کردن جسم، به چهار شکل متشابه با شکل اولیه) تجزیه کرد، می‌توان از این روش استفاده کرد.

تنها محاسبه‌ای که در این روش لازم است، به دست آوردن فاصلهٔ مرکز جرم اجزای کوچک از مرکز جرم جسم بزرگ است. دایره مثالی است که خاصیت دوم را ندارد.

مربع و مستطیل حالات خاصی از متوازی‌الاضلاع هستند. برای یک متوازی‌الاضلاع به ابعاد a و b و جرم M

$$I = M\frac{a^2 + b^2}{12} \qquad (۲۳)$$

به دست می‌آید. (این را به عنوان تمرین ثابت کنید.) مکعب، مکعب مستطیل، و در حالات کلی‌تر متوازی‌السطوح، و نیز هرم، مثالهایی سه بعدی‌اند که لختی دورانی آنها را می‌توان با این روش محاسبه کرد.

مراجع

1. R Schmidt & K Housen, *The Industrial Physicist* (July 1995) 21-24.

ترجمهٔ این مقاله در شمارهٔ ۱ سال ۱۵ مجلهٔ فیزیک چاپ شده است.

۲. هر کتاب فیزیک پایه، از جمله فیزیک، هالیدی، رزنیک؛ مرکز نشر دانشگاهی.

معلم باید

... معلم باید اسم شاگردانش را بداند و قیافهٔ آنها را بشناسد. این برای بعضی معلمها آسان و برای بعضی دیگر بسیار دشوار است، ولی در هرحال ضرورت دارد. من خودم در این مورد متأسفانه ضعیف‌ام و درست نیست به کسی نصیحت کنم، اما دست کم پذیرفته‌ام که باید چنین باشد. یکی از بدترین اشتباهات هاوسمن استاد دانشگاه لندن این بود که به ناتوانی در تشخیص دادن دانشجویانش مباهات می‌کرد. بخصوص دخترها از این رفتار او متنفر بودند، چون در کلاس درس اشتباهات آنها را با هیجانی که بوی کینهٔ شخصی هم می‌داد به رخشان می‌کشید و آنوقت فردا صبح که در خیابان از کنارشان می‌گذشت انگار نه انگار که قبلاً هم آنها را دیده است.

Gilbert Hight, *The Art of Teaching*, 1950.